

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅 

管理

<

2022年3月

>

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457097

排名 - 1198

单变量微积分笔记31——幂级数和泰勒级数

实际应用中，总是会出现一堆复杂的函数，这类函数往往令物理学家和数学家都十分头疼。为了解决这一窘境，泰勒想：会不会存在一种方法，把一切函数表达式都转化为多项式函数来近似呢？这样，处理问题不就变得简单了吗？经过泰勒夜以继日的奋斗，终于研究出了泰勒级数的理论。它将一切函数，不论表达式有多么多么的复杂，只有能保证n阶导数存在，就能将它的局部用多项式展开。泰勒级数在近似计算中有重要作用。实际上，利用多项式函数近似（或者称作逼近）一个复杂函数，是研究实际问题的一个非常重要的思想。

幂级数与几何级数

幂级数

幂级数是这样表示的：

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

有人说必须要写成 $\sum$ 形式，别信他的，只要能准确表达意思就好。

几何级数

当 a_n 是定值时，幂级数称为几何级数。

上篇文章中提到过，当 $a_n = 1$ 时：

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad (|x| < 1)$$

收敛半径

以 $a_n = 1$ 的几何级数为例， x 的取值范围（ $-1 < x < 1$ ）称为收敛半径，用 R 表示。在收敛半径内，幂级数是收敛的；在收敛半径外，幂级数是发散的；如果 $|x| = R$ ，幂级数的收敛性不确定。根据该定义，如果 $x < |R|$ ，则必然有 $|a_nx^n| \rightarrow 0$ ，也就是：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n} \right| < 1$$

将收敛半径看成一个圆， x 的取值点如果在圆内，则幂级数是收敛的，在圆外则是无意义的。我们可以计算圆的大小，正如下面的示例，圆甚至可能是无穷大。

示例，计算下列幂级数的收敛半径：

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

1)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

2)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

3)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$$

4)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} / \left(\frac{x}{2}\right)^n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{2} \right|$$

当 $x < 2$ 时极限小于1，所以收敛半径是 $R = 2$ 。可以看出，当 $x < 2$ 时，这是一个 $a_n = 1$ 的常规几何级数，其值是 $1/(1 - x)$ ，就是最开始介绍的公式。

2) 这里存在 a_n ， $a_n = n!$

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} / \frac{x^n}{n!} = \frac{x \cdot x^n}{(n+1)n!} \times \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} / \frac{x^n}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 < 1$$

对于任意 x ，幂级数都是收敛的，其收敛半径是 ∞

3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \times \frac{n2^n}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{nx}{2(n+1)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{2} \right|$$

当 $x < 2$ 时极限小于1，所以收敛半径是 $R = 2$ 。

4)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \times \frac{(2n)!}{x^{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^2|}{(2n+1)(2n+2)} = 0 < 1$$

对于任意 x ，幂级数都是收敛的，其收敛半径是 ∞

幂级数的运算

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad (|x| < 1)$$

以上面的幂级数为例，它的意义之一就在于它可以反写右侧的表达式，即：

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad (|x| < 1)$$

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At) 有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

\$v = \{2gh\}^{1/2}\$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

这样，幂级数就变成了一个灵活的工具，他能够将一个表达式展开。可以将幂级数看作没有尽头的多项式，所有适用于多项式的运算，包括加减乘除乘方开方等，都同样适用于幂级数，当然，还有我们关注的微分和积分，如下所示：

$$\frac{d}{dx}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots) = 0 + a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$$

$$\int (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots) dx = C + a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \frac{a_2x^3}{3} + \dots$$

示例

很容易算出下面的积分：

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(x+1)$$

现在我们试图用幂级数去计算：

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \dots) dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$(R = 1)$$

由此也得到了一个副产品，就是 $\ln(x+1)$ 的解释：

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

泰勒级数

泰勒公式

如果 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 具有任意阶导数，则下面的幂级数称为 $f(x)$ 在 x_0 点的泰勒级数：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

在泰勒公式中， x 处于收敛半径内部，即 $|x| < R$ ，取 $x_0 = 0$ 点，得到级数：

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

上式表示对 f 进行 n 次求导之后，在零点的值，除以 n 的阶乘再乘以 x^n 。

实际上，在泰勒公式中，我们定义了

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

现在来看看泰特公式为什么成立。

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \times 3a_3x + 3 \times 4a_4x^2 + \dots$$

$$f'''(x) = 2 \times 3a_3 + 2 \times 3 \times 4a_4x + 3 \times 4 \times 5a_5x^2 + \dots$$

...

以三阶导数为例：

$$f'''(0) = 2 \times 3a_3$$

$$a_3 = \frac{f'''(0)}{1 \times 2 \times 3} = \frac{f'''(0)}{3!}$$

推广到n阶导数：

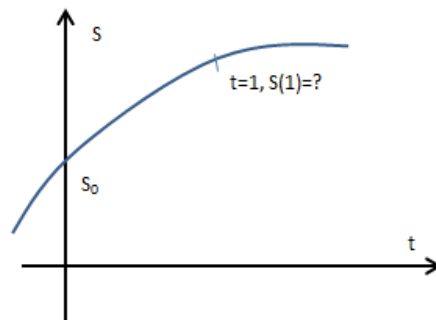
$$f^n(0) = 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (n-1) \times na_n$$

$$a_n = \frac{f^n(0)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (n-1) \times n} = \frac{f^n(0)}{n!}$$

泰勒公式的应用

泰勒公式是一个用函数在某点的信息描述其附近取值的公式。如果函数足够平滑的话，在已知函数在某一点的各阶导数值的情况之下，泰勒公式可以用这些导数值做系数构建一个多项式来近似函数在这一点附近的值。

如下图所示，假设汽车沿着一个方向行驶，车辆的位移S是关于时间t的函数，我们知道在t = 0时刻（可以理解为0点）位移是S₀，现在想要知道t = 1时刻（凌晨1点）车辆的位置：



$$s(t) \approx s(0) + s'(0)t + \frac{s''(0)t^2}{2!} + \frac{s'''(0)t^3}{3!} + \dots$$

e^x

f(x) = e^x是一个可以用泰勒公式展开的例子。

$$f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, f'''(x) = e^x \dots, f^n(x) = e^x$$

$$f^n(0) = e^x|_0 = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad (R = \infty)$$

当 $x = 1$ 时，还附带得到了 e 的解释：

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

多项式的泰勒展开式

求解泰勒级数 $3x^3 + 4x^2 - 2x + 1$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = 9x^2 + 8x - 2|_{x=0} = -2$$

$$f''(0) = 18x + 8|_{x=0} = 8$$

$$f'''(0) = 18$$

$$f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(5)}(0) = 0$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= 1 - 2x + \frac{8x^2}{2!} + \frac{18x^3}{3!} + 0 + 0 + \dots \\ &= 1 - 2x + 4x^2 + 3x^3 \end{aligned}$$

由此可以看出，多项式的泰勒级数就是多项式本身。

幂级数的展开

示例1

展开 $1/(1+x)$

由于已经知道几何级数 $1/(1-x)$ 的展开式，所以可以直接写出答案：

$$1/(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad (R = 1)$$

示例2

展开 $\sin(x)$

这需要动用泰勒公式。

$$\sin(0) = 0$$

$$\sin'(x) = \cos(x), \quad \cos(0) = 1$$

$$\sin''(x) = -\sin(x), \quad -\sin(0) = 0$$

$$\sin'''(x) = -\cos(x), \quad -\cos(0) = -1$$

$$\sin^{(4)}(x) = \sin(x), \quad \sin(0) = 0$$

.....

根据泰勒公式：

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

由于 $|a_n x^n| \rightarrow 0$ ，所以 $R = \infty$

示例3

展开cos(x)

同上，

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

示例4

展开xsin(x)

$$x \sin(x) = x \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)!}, \quad (R = \infty)$$

展开的意义

先来看一个很难处理的积分，对正态分布进行积分：

$$\int e^{-x^2} dx = ?$$

由于被积函数与 e^x 相似，我们又已经知道 e^x 的展开式，所以可以进行下面的变换：

$$t = -x^2$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots$$

$$\int e^{-x^2} dx = \int \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots \right) dx$$

很容易计算右侧的积分。

这个例子展示了幂级数展开的意义——把质的困难转化成量的复杂。展开前求解函数的值很困难，展开后是幂函数的线性组合，虽然有很多很多项，但是每一项都是幂函数，因此每一项都容易求解。于是只要对展开后的函数求和，就能得到展开前的函数的值。

综合示例

示例1

求解泰勒级数

$$1) 2\sin x \cos x$$

$$2) x \ln(1 - x^3)$$

1)

$$f(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x, f(0) = 0$$

$$f' = 2\cos 2x, \quad f'(0) = 2$$

$$f'' = -4\sin 2x, \quad f''(0) = 0$$

$$f''' = -8\cos 2x, \quad f'''(0) = -4 \times 2$$

$$f^{(4)} = 16\sin 2x, \quad f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(5)} = 32\cos 2x, \quad f^{(5)}(0) = (-4)^2 \times 2$$

.....

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x + \frac{2(-4)x^3}{3!} + \frac{2(-4)^2x^5}{5!} + \dots \\ &= 2 \left(x + \frac{(-1)^1(2x)^3}{3!} + \frac{(-1)^2(2x)^5}{5!} + \dots \right) \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

$$\frac{(-1)^{n+1} (2x)^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!} \times \frac{(2n+1)!}{(-1)^n (2x)^{2n+1}} = \frac{-4x^2}{(2n+2)(2n+3)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{-4x^2}{(2n+2)(2n+3)} \right| = 0 < 1, \quad R = \infty$$

2)

$$f(x) = x \ln(1 - x^3)$$

$$f'(x) = x' \ln(1 - x^3) + x (\ln(1 - x^3))' = \ln(1 - x^3) - \frac{3x^3}{1 - x^3}$$

$$f''(x) = (\ln(1 - x^3))' - \left(\frac{3x^3}{1 - x^3} \right)' = -\frac{3x^2}{1 - x^3} - \frac{9x^2(1 - x^3) + 9x^5}{(1 - x^3)^2}$$

三阶导数的计算会非常麻烦，最好放弃，寻找其它方法。

$\ln(1 - x^3)$ 和 $\ln(1 + x)$ 非常相似，已经知道 $\ln(1 + x)$ 的结果：

$$\ln(x + 1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

现在用 $-x^3$ 代替 x ：

$$\ln(-x^3 + 1) = -x^3 - \frac{x^6}{2} - \frac{x^9}{3} - \frac{x^{12}}{4} + \dots$$

$$x \ln(-x^3 + 1) = -x^4 - \frac{x^7}{2} - \frac{x^{10}}{3} - \frac{x^{13}}{4} - \dots$$

示例2

求解泰勒级数的积分 $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots$

$$\int f(x)dx = C + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

取 $C = 1$, 当 $|x| < 1$ 时, 积分的结果是几何级数:

$$\int f(x)dx = \frac{1}{1-x}$$

$$f(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

所以当 $|x| < 1$ 时, 还可得到副产物:

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

示例3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{n} \left(\left(\frac{2i}{n} \right)^2 - 1 \right) = ?$$

看起来就很难对付。

仔细观察后会发现两个突破口, 第一个是求和后求极限, 这会联想到黎曼和; 第二个是通过求和公式联想到某个函数的展开式, 如果找到原函数, 就能求解积分。顺着这个思路, 由于 $2/n$ 反复出现, $n \rightarrow \infty$ 时, $2/n \rightarrow 0$, 所以可将 $2/n$ 看作 Δx , 于是和式就可以写成:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x \left(\left(\frac{2i}{n} \right)^2 - 1 \right)$$

如果令 $f(x) = (2i/n)^2 - 1$, 那么:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x \left(\left(\frac{2i}{n} \right)^2 - 1 \right) \approx \int_a^b f(x)dx$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(\left(\frac{2i}{n} \right)^2 - 1 \right) = ((\Delta x)^2 - 1) + ((2\Delta x)^2 - 1) + ((3\Delta x)^2 - 1) + \dots$$

由此可以推测, $x = 2i/n = i\Delta x$, $f(x) = x^2 - 1$ 。

用 $n = 4$ 验证, 当 $n = 4$ 时, $\Delta x = 2/4 = 1/2$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{2 \times 0}{4} \right)^2 - 1 + \left(\frac{2 \times 1}{4} \right)^2 - 1 + \left(\frac{2 \times 2}{4} \right)^2 - 1 + \left(\frac{2 \times 3}{4} \right)^2 - 1 \\ &= \left(\frac{1 \times 0}{2} \right)^2 - 1 + \left(\frac{1 \times 1}{2} \right)^2 - 1 + \left(\frac{1 \times 2}{2} \right)^2 - 1 + \left(\frac{1 \times 3}{2} \right)^2 - 1 \\ &= ((0)^2 - 1) + ((\Delta x)^2 - 1) + ((2\Delta x)^2 - 1) + ((3\Delta x)^2 - 1) \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ 时, $i = n - 1$, $2i/n \rightarrow 2$, 最终:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^{2i/n} (x^2 - 1)dx = \int_0^2 (x^2 - 1)dx = \frac{2}{3}$$

出处：微信公众号 "我是8位的"

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注作者公众号 "我是8位的"



随笔

分类: [单变量微积分](#)

标签: [几何级数](#), [幂级数](#), [泰特级数](#), [泰勒公式](#)

好文要顶

关注我

收藏该文

我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

+加关注

1

0

推荐

反对

« 上一篇: [单变量微积分笔记30——无穷级数和收敛判定](#)

» 下一篇: [线性代数笔记3——向量2 \(点积\)](#)

posted on 2017-12-20 22:00 我是8位的 阅读(7008) 评论(1) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论，立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) [博客园首页](#)

- 【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事
- 【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告 X

JAVA Office文档在线编辑APIs

简单易用的Word, Excel, PowerPoint在线编辑接口

cloud.e-iceblue.cn

打开

- 编辑推荐:
- 革命性创新，动画杀手铜 @scroll-timeline

· 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务

- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇



最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
 - 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推 “杀手级” 功能，可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
博客园

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes